55 РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА, Прилеп - 2012 година

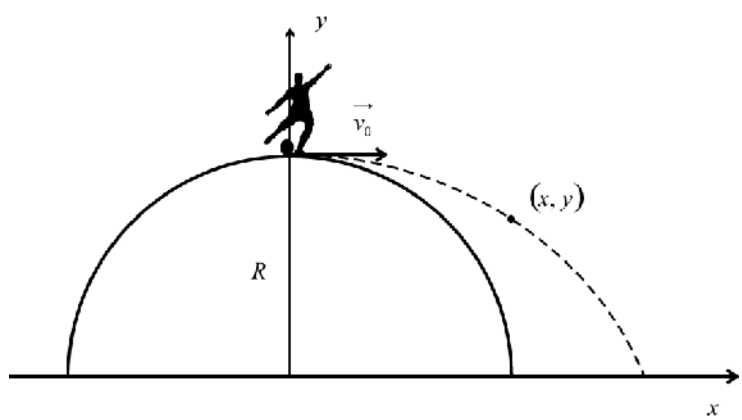
- четврта година -

(решенија на задачите)

1. Фудбалер стои на врвот на една карпа со облик на полутопка и удира фудбалска топка во хоризонтален правец. Колкава треба да биде минималната брзина на топката за таа да не удри во карпата?

Решение: Ако топката не удри во карпата, тогаш нејзината траекторијата не се сече со површината на сферата. Поради симетрија задачата може да се поедностави и да се земе дека траекторијата не се сече со големиот круг од сферата. Координатниот почеток го поставуваме во центарот на полутопката. Движењето на топката се разгледува како хоризонтален истрел и според тоа положбата на фудбалската топка во даден момент t е дадена со изразите

$$x(t) = v_0 t; \qquad y(t) = R - \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$



За да не удри топката во карпата треба растојанието од точката чии што координати се x и y до координатниот почеток да биде поголемо од R, односно според Питагоровата теорема

$$x^2 + y^2 > R^2. \tag{2}$$

Со елиминација на времето од (1) се добива равенката на траекторијата

$$y(x) = R - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}. \tag{3}$$

Сега се заменува (3) во (2) и се добива

$$x^2 + \left(R - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}\right)^2 > R^2, \tag{4}$$

односно после малку средување

$$1-\frac{Rg}{v_0^2}+\frac{g^2x^2}{4v_0^4}>0\,. \tag{5}$$

Ако (5) се помножи со v_0^4 и се воведе смената $u=v_0^2$ се добива условот

$$u^2-Rgu+\frac{g^2x^2}{4}>0\,, \tag{6}$$

кој треба да важи за позитивни u и сите x такви што $0 < x < R$. Решенија на квадратната равенка во (6) се

$$u_{1,2}=\frac{Rg\pm\sqrt{R^2g^2-g^2x^2}}{2}=g\,\frac{R\pm\sqrt{R^2-x^2}}{2}\,. \tag{7}$$

и тие се реални бидејќи $R > x$. Бидејќи изразот во условот (6) е парабола свртена со темето надоле, условот (6) е исполнет само за вредности на u кои се наоѓаат десно од поголемото од двете решенија во (7)

$$u>g\,\frac{R+\sqrt{R^2-x^2}}{2}\,. \tag{8}$$

Бидејќи топката не треба да удри во никоја точка од карпата, условот (8) треба да важи за сите точки од сферата за кои $0 < x < R$, односно

$$u\geq gR\,. \tag{9}$$

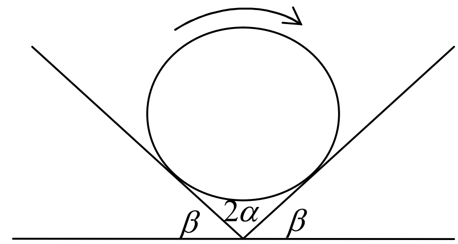
Поради воведената смена $u=v_0^2$,

$$v_0^2\geq gR\,, \tag{10}$$

или

$$v_0\geq\sqrt{Rg}\,. \tag{11}$$

2. Цилиндер со маса m, којшто ротира околу својата оска, се поставува помеѓу две плочи кои градат агол 2α. Коефициентот на триење помеѓу цилиндерот и плочите е μ. Со колкави сили цилиндерот дејствува на плочите. Аголот помеѓу двете плочи и хоризонталната подлога изнесува β.



Решение: На цилиндерот дејствуваат силата на Земјина тежа $m\vec{g}$, силите на нормална реакција на подлогите на двете плочи $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и силите на триење помеѓу цилиндерот и двете плочи $\vec{F}_{tr1}$ и $\vec{F}_{tr2}$. Од условот збирот на сите сили коишто дејствуваат на цилиндерот да е еднаков на нула, добиваме (да се види сликата):

x – оска: $N_1 \sin\beta + F_{tr1} \sin\alpha - N_2 \sin\beta + F_{tr2} \sin\alpha = 0$, (1)

y – оска: $N_1 \cos\beta - F_{tr1} \cos\alpha + N_2 \cos\beta + F_{tr2} \cos\alpha - mg = 0$. (2)

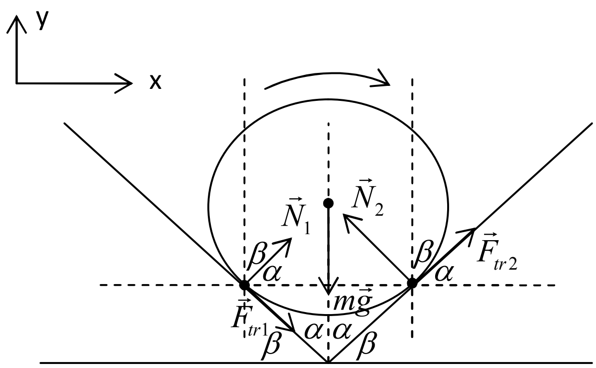
Користејќи ја врската помеѓу силата на триење и силата на нормална реакција на подлогата $F_{tr1} = \mu N_1$ и $F_{tr2} = \mu N_2$, како и врската помеѓу аглите α и β, $\beta = 90^0 - \alpha$, од релациите (1) и (2) за силите на нормална реакција на подлогите се добива:

$$N_1 = \frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \frac{1-\mu \mathrm{tg}\alpha}{2(1+\mu^2)\mathrm{tg}\alpha}, \quad (3)$$

$$N_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \frac{1+\mu \mathrm{tg}\alpha}{2(1+\mu^2)\mathrm{tg}\alpha}. \quad (4)$$

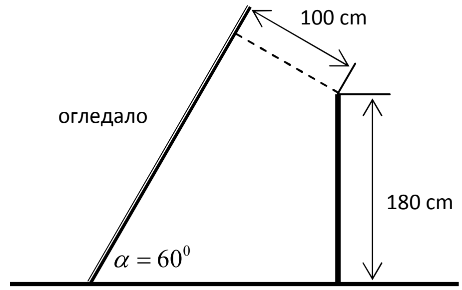
Од третиод Њутнов закон следува дека ова се всушност силите со кои цилиндерот дејствува на плочите.

Забелешка: Бидејќи силите на нормална реакција на подлогата по вредност се поголеми од нула, од релацијата (3) следува дека $1-\mu \mathrm{tg}\alpha > 0$, т.е. $\mu < \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$. Случајот кога $\mu \geq \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$ означува дека $N_1 = 0$, т.е. цилиндерот или мирува недопирајќи ја левата плоча, или пак цилиндерот се искачува по десната плоча.



y
x
$\vec{N}_1$
$\vec{N}_2$
β
α
$\vec{F}_{tr2}$
$m\vec{g}$
$\vec{F}_{tr1}$
β
α
α
β

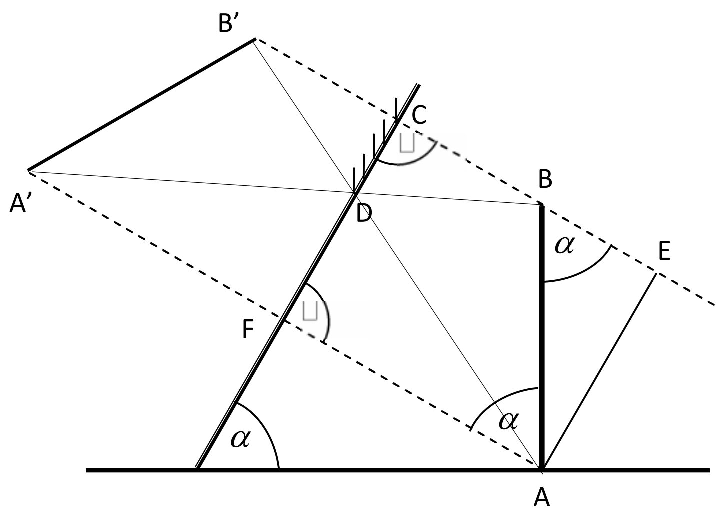
3. Рамно огледало е поставено под агол $\alpha = 60^0$ во однос на хоризонталната подлога. Колкава е минималната должина на огледалото која овозможува во него да се види човек со висина од 180 cm, којшто стои на хоризонталната подлога? Растојанието од очите на човекот до огледалото е 100 cm. Да се занемари растојанието од очите на човекот до неговото теме.



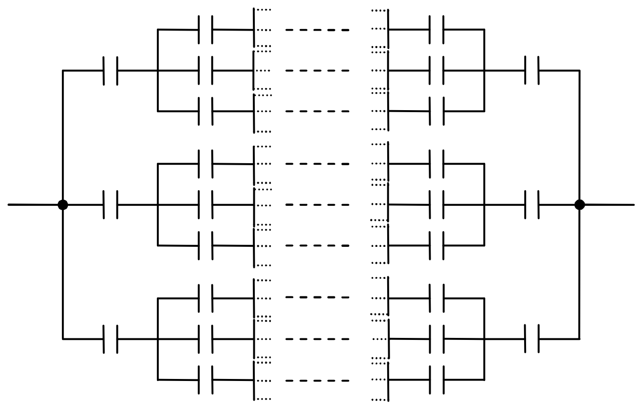
Решение:

Првин ќе го конструираме ликот на човекот во огледалото (да се види сликата). Забележуваме дека доволна е должина $\overline{DC}$ на огледалото, за чомекот да миоже да се види целосно во огледалото. Од цликата се гледа дека $\overline{AB} = 180\ \text{cm}$, $\overline{BC} = \overline{B'C} = 100\ \text{cm}$ и $\Delta\, BAF = \Delta\, AOF = \alpha$, како агли со заемно нормални краци. Исто така, $\Delta\, ABE = \Delta\, AOF = \alpha$, како агли со заемно нормални краци. Од сликата забележуваме дека $\overline{AE} = \overline{AB}\sin\alpha$ и дека триаголникот AEB' е сличен со триаголникот DCB'. Од сличноста на триаголниците добиваме дека:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EB'}}{\overline{CB'}} \quad \Rightarrow \quad \overline{DC} = \overline{AE}\frac{\overline{CB'}}{\overline{EB'}} = \overline{AB}\sin\alpha \frac{\overline{CB}}{2\overline{CB} + \overline{AB}\cos\alpha} = 53,75\ \text{cm}\,.$$

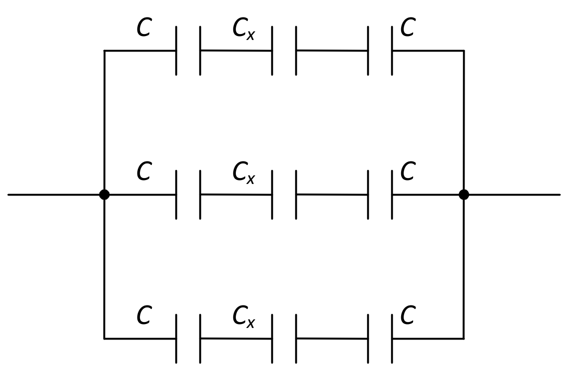


4. Да се определи капацитетот на бесконечниот систем од кондензатори прикажани на сликата. Секоја гранка од системот се разгранува на три идентични гранки. Капацитетот на секој од кондензаторите изнесува C. (Следната релација за бесконечен геометриски ред може да биде од корист: $1+q+q^2+\cdots=\dfrac{1}{1-q}$, $0<q<1$)



Решение:

Начин I. Нека капацитетот на бесконечниот систем од кондензатори го означиме со C_x. Од слика 3 забележуваме дека системот од кондензатори можеме да го претставиме со еквивалентен систем прикажан на слика 3а.



Слика 3а

Еквивалентниот капацитет на кондензаторите во секоја од гранките е:

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C_x}+\frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C'=\frac{C_xC}{2C_x+C}. \tag{1}$$

Бидејќи капацитетот на системот од кондензатори е C_x, од слика 3а, добиваме:

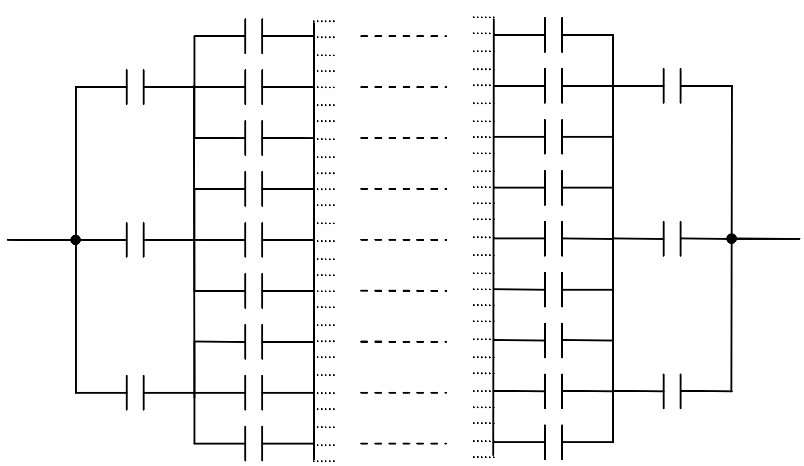
$$C_x = 3C' = \frac{3C_x C}{2C_x + C}, \qquad (2)$$

од кадешто добиваме дека $C_x = C$.

Начин II. Задачата може да се реши доколку шемата од слика 3 се претстави со еквивалентна шема (Слика 3б) добиена со спојување на точките коишто се наоѓаат на ист потенцијал. Така од слика 3б добиваме:

$$\frac{1}{C_x} = 2\left(\frac{1}{3C} + \frac{1}{3^2 C} + \frac{1}{3^3 C} + \cdots\right) = \frac{2}{3C}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{2}{3C} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{C}, \qquad (3)$$

односно $C_x = C$.



Слика 3б

5. Честичка со маса m се движи во поле на еластични сили и има потенцијална енергија $U = \frac{kx^2}{2}$, каде што k е константа на еластичност, а x е координата на честичката. Да се определи минималната вредност на енергијата на честичката. Да се користи Хајзенберговиот принцип на неопределеност $\Delta x \Delta p \approx \hbar$. (Следните формули за извод на степенска функција може да бидат од корист: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ за $n \in N$, или пак следното неравенство: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a > 0$ и $b > 0$)

Решение:

Честичка која што се движи во поле со потенцијал $U = \frac{kx^2}{2}$ претставува линеарен хармониски осцилатор. Вкупната енергија на честичката е збир од кинетичката енергија T и потенцијалната енергија U, т.е.

$$E = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \tag{1}$$

Неопределеностите на координатата и брзината на честичката се:

$$\Delta x \approx x, \tag{2}$$

$$\Delta v \approx v. \tag{3}$$

Со користење на релациите (1), (2) и (3) и Хајзенберговиот принцип на неопределеност $\Delta x \Delta p \approx \hbar$, се добива вкупната енергија на честичката (линеарниот хармониски осцилатор) во зависност со координатата мерена од рамнотежната положба:

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{kx^2}{2}. \tag{4}$$

За определување на минималната вредност на енергијата на честичката потребно е првиот извод на енергијата на честичката по координатата x да биде еднаков на нула, а вториот извод да биде поголем од нула. Така се добива

$$-\frac{\hbar^2}{mx^3}+kx=0\,, \tag{5}$$

од каде што за координатата на честичката се добива:

$$x_m=\sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{km}}\,. \tag{6}$$

Со барање на вториот извод се покажува дека истиот е поголем од нула, т.е. x_m е вредноста на координатата на честичката за која енергијата на честичката е минимална. Со замена на вредноста (6) во релацијата (4) за минималната вредност на енергијата се добива:

$$E_{\min}\approx\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}+\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}=\hbar\omega\,, \tag{7}$$

каде што $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ е фрекфенцијата на линеарниот хармониски осцилатор.

Забелешка: Резултатот (6) може директно да се добие од релацијата (4) со користење на неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина, односно:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\,. \tag{8}$$

Со користење на релацијата (8) во (4) се добива ($a=\frac{\hbar^2}{2mx^2}$, $b=\frac{kx^2}{2}$):

$$E\approx\frac{\hbar^2}{2mx^2}+\frac{kx^2}{2}\geq 2\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mx^2}\frac{kx^2}{2}}=\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$

односно $E_{\min}\approx\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}=\hbar\omega$.