



66. РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА

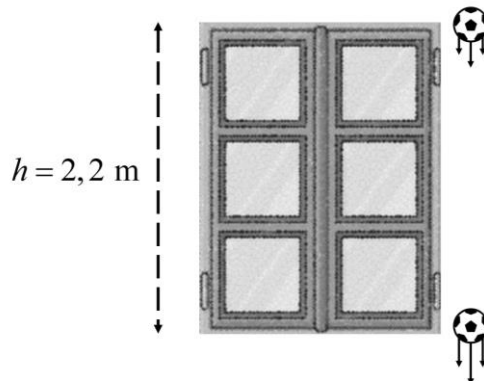
20 април 2024

I година

(решенија на задачите)

Задача 1. Тело е пуштено слободно да паѓа, без почетна брзина, од определена висина од некоја зграда. На пониска висина од почетната висина на телото се наоѓа прозорец (видете Слика 1). Од која висина (сметано од горниот дел на прозорецот) е пуштено телото слободно да паѓа, ако висината на прозорецот $h = 2,2 \text{ m}$, ја поминува за време од $t = 0,28 \text{ s}$?

Земјиното забрзување изнесува $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Слика 1

Решение:

Паѓајќи надолу, телото се движи со забрзување еднакво на Земјиното забрзување. Да земеме дека брзината на телото во моментот кога стигнува до горниот дел на прозорецот е еднаква на v . Тогаш, таа брзина е поврзана со висината h и времето t преку релацијата:

$$h = vt + \frac{gt^2}{2}.$$

Затоа, таа е еднаква на

$$v = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2} = 6,48 \text{ m/s}.$$

Знаејќи дека телото е пуштено слободно да паѓа без почетна брзина ($v_0 = 0 \text{ m/s}$) и брзината која ја достигнало во моментот кога ја изминува бараната висина, може да го определиме времето потребно на телото да падне од бараната висина до горниот дел од прозорецот.

$$v = v_0 + gt_0,$$

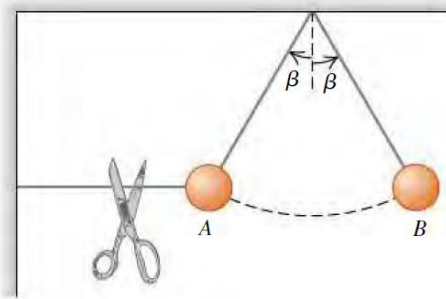
$$t_0 = \frac{v}{g} = \frac{6,48 \text{ m/s}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 0,66 \text{ s}.$$

Конечно, висината од која е пуштено телото слободно да паѓа ќе ја добиеме од:

$$H_0 = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,66^2 \text{ s}^2}{2} = 2,14 \text{ m}.$$

Забелешка: За одредување на брзината со која телото стигнува до горниот дел на прозорецот се доделуваат 7 поени, а за одредување на времето кое му е потребно на телото да ја помине бараната висина се доделуваат 6 поени. Конечната релација за висината, заедно со точен нумерички резултат се наградува со последните 7 поени. За погрешно пресметана нумеричка вредност се одземаат 2 поена, а за незапишување на единицата мерка во која е изразен конечниот резултат се одзема 1 поен.

Задача 2. Топче се држи во мирување со помош на две лесни нерастегливи јажиња, како што е прикажано на Слика 2. Во еден момент, хоризонталното јаже е пресечено, па топчето почнува да осцилира како нишалко. Позицијата В е најоддалечената позиција во десно до која стигнува топчето. Потоа топчето се враќа кон позицијата А. Колку изнесува односот од силата на затегнување на јажето во точката В и силата на затегнување во истото јаже, но во точката А, кога хоризонталното јаже се уште не било пресечено? Аголот, кој го зафаќа топчето со вертикалната оска во почетниот момент (точката А) и во моментот кога е во точката В, е обележан на Слика 2 и изнесува β .



Слика 2

Решение:

Кога телото е во мирување, забрзување на телото мора да биде еднакво на 0. Затоа, векторскиот збир на сите сили кои дејствуваат на телото во точката А, е еднаков на 0, односно:

$$\vec{T}_A + \vec{P} + \vec{H} = 0.$$

Во последната релација со \vec{T}_A ја обележавме силата на затегнување на јажето закачено на таванот, \vec{H} е силата на затегнување на хоризонталното јаже, а пак \vec{P} е силата тежа. Ако сега поставиме координатен систем така што вертикалната оска да се поклопува со вертикално поставениот сид, а за позитивна насока ја избереме насоката вертикално нагоре, можеме да запишеме:

$$T_A \cos \beta = P \Rightarrow T_A = \frac{P}{\cos \beta}.$$

По пресекувањето на хоризонталното јаже, телото почнува да се движи до точката В по кружен лак. Тоа значи дека во секој момент од движењето, радијалното забрзување a_n на топчето е поврзано со брзината v во тој момент преку релацијата:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Но, во точката В, брзината е еднаква на 0, па затоа и $a_n = 0$. Ако сега го запишеме вториот Њутнов за топчето точката В, избирајќи ја оската во радијален правец (долж јажето), односно нормално на тангентата на кружната траекторија, ќе добиеме:

$$T_B - P \cos \beta = ma_n = 0 \Rightarrow T_B = P \cos \beta.$$

Резултатот за силата на затегнување во точката В, може да се добие и со проектирање на равенките за силите (вториот Њутнов закон) долж истиот координатен систем, како за точката А, односно у-оската се избере вертикално нагоре, а х-оската се избере хоризонтално надесно. Во оваа задача, важно е да се забележи дека во точката В, силите не се во рамнотежа, па така топчето ќе има забрзување, додека, пак, брзината на топчето во таа точка е нула.

Запишувајќи го вториот Њутнов закон во точката В и проектирајќи ги векторите на силите, и векторот на забрзувањето, се добива

$$\vec{T}_B + \vec{P} = m\vec{a},$$

$$\begin{aligned}
 -T_B \sin \beta &= -ma_x, \\
 T_B \cos \beta - P &= -ma_y, \\
 T_B \sin \beta &= ma_x = ma \cos \beta, \\
 P - T_B \cos \beta &= ma_y = ma \sin \beta,
 \end{aligned}$$

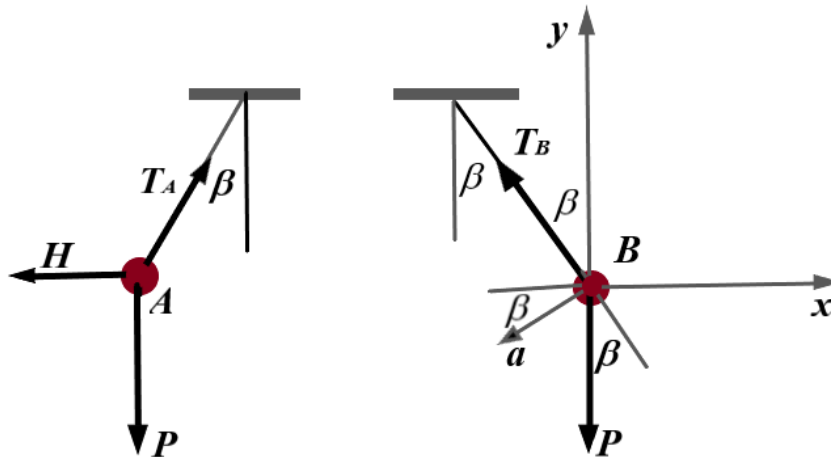
Со делење на последните две равенки и примена на основниот тригонометриски идентитет, се добива

$$\begin{aligned}
 \frac{T_B \sin \beta}{P - T_B \cos \beta} &= \frac{\cos \beta}{\sin \beta}, \\
 T_B \sin^2 \beta &= P \cos \beta - T_B \cos^2 \beta, \\
 T_B (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) &= P \cos \beta, \\
 T_B &= P \cos \beta.
 \end{aligned}$$

Конечно, со делење на двата израза за силите на затегнување на јагето во точките А и В, за односот T_A/T_B , лесно се добива:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{\cos^2 \beta}.$$

Дијаграмите на силите кои ги искористивме при решавањето на оваа задача се дадени на Слика 2.1



Слика 2.1

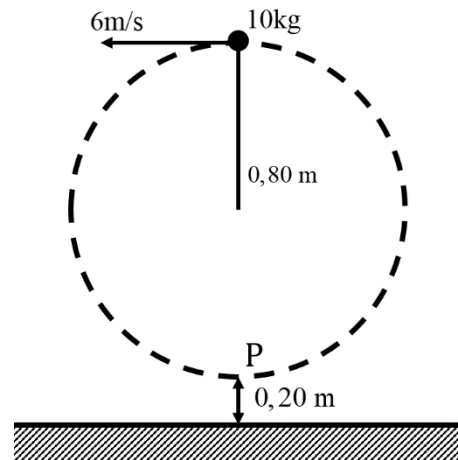
Забелешка: За точно запишување на вториот Њутнов закон за топчето во точката А се доделуваат 7 поени, а за точно запишување на вториот Њутнов закон за топчето во точката В се доделуваат 8 поени. Крајната релација се наградува со преостанатите 5 поени. Ако ученикот во точката В земе дека вкупното забрзување на телото е еднакво на 0, се доделуваат максимално 12 поени за целата задача.

Задача 3. Гумено топче со маса $m = 10 \text{ kg}$, е закачено на крајот на нерастеглив конец чија должина е $l = 0,8 \text{ m}$. Топчето, закачено на крајотот се врти по вертикално поставена кружница, како на Слика 3. Точката Р е најниската точка од кружницата и се наоѓа на висина $h_0 = 0,2 \text{ m}$ од подот. Брзината на топчето во највисоката точка од кружницата изнесува $v = 6 \text{ m/s}$. Ако се занемари отпорот на воздухот и се искористи дека вкупната механичка енергија останува непроменета, да се пресмета:

а) вкупната механичка енергија на телото земајќи го подот како референтно ниво,

б) брзината на топчето во точката Р.

Земјиното забрзување изнесува $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Слика 3

Решение:

а) Бидејќи отпорот на воздухот се занемарува може да сметаме дека вкупната енергија на топката во било која точка е иста. За да ја пресметаме вкупната енергија ќе го разгледаме случајот кога топчето се наоѓа во највисоката точка. Во оваа точка, топчето поседува кинетичка и потенцијална енергија, а нивниот збир ќе ни ја даде вкупната енергија:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Брзината и масата на топчето ни се дадени во условот на задачата, а висината може да ја определиме според:

$$h = 2l + h_0 = 2 \cdot 0,8 \text{ m} + 0,2 \text{ m} = 1,8 \text{ m}.$$

Заменувајќи ги вредностите во формулата за вкупната енергија добиваме:

$$E = \frac{10 \text{ kg} \cdot 6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2} + 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,8 \text{ m} = 356,58 \text{ J}.$$

б) Од Законот за запазување на енергија знаеме дека вкупната енергија кога топката ќе биде во најниската положба е иста со вкупната енергија на топката кога е во највисоката положба, односно:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_p^2}{2} + mgh_0.$$

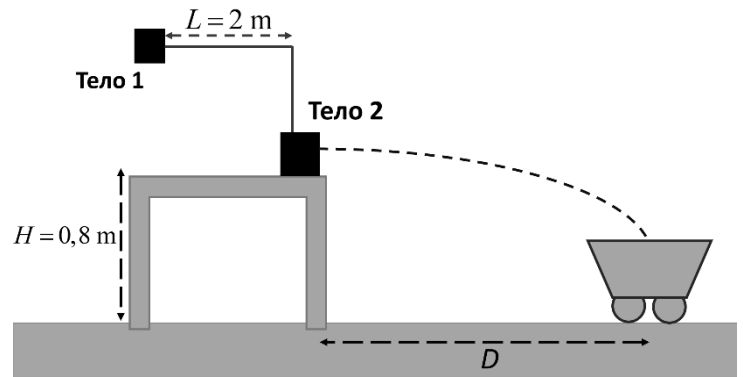
$$v_p^2 = v^2 + 2g\Delta h = 6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1,8 - 0,2) \text{ m} = 67,4 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

па за брзината во точката Р се добива:

$$v_p = 8,21 \text{ m/s}.$$

Забелешка: Деловите а) и б) се наградуваат со по 10 поени. За погрешно пресметани нумерички вредности се одземаат по 2 поена, а за незапишување на единицата мерка во која се изразуваат конечните резултати се одзема по 1 поен.

Задача 4. Тело 1 со маса $m_1 = 3 \text{ kg}$ е врзано за едниот крај на нерастегливо јаже со должина $L = 2 \text{ m}$ и се држи подигнато, така што јагето е паралелно со масата и подот, а се наоѓа на висина L од масата (видете Слика 4). Другиот крај на јагето е неподвижен и не може да се поместува. Откако ќе се пушти да се движи, телото 1 удира во телото 2, коешто има маса $m_2 = 5 \text{ kg}$ и е поставено на масата, чијашто висина е $H = 0,8 \text{ m}$. Ако се знае дека по судирот, телото 1 продолжува да се движи по масата со брзина $v_1' = 1,57 \text{ m/s}$, во спротивна насока од телото 2, да се определи:



- на кое растојание од масата треба да се постави количка за телото 2 да падне во неа;
 - со каква брзина ќе се придвижат количката и телото 2 по нивниот судир, ако се знае дека количката пред судирот мирувала и нејзината маса е $M = 12 \text{ kg}$.
- Силите на триење како и силата на отпор на воздухот да се занемарат. Земјиното забрзување изнесува $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Решение:

а) За да го определиме дометот на телото 2 потребно е да ја знаеме брзината v_{2x} со која телото 2 започнува да паѓа од масата. Оваа брзина ќе ја добиеме користејќи ги законите за запазување на енергијата (за телото 1) и импулсот. Од Законот за запазување на енергија ќе ја добиеме брзината која ја има телото 1 непосредно пред судирот (според условот на задачата, висината од којашто е пуштено телото е еднаква со должината на јагето):

$$v_1 = \sqrt{2gL} = 6,26 \text{ m/s}.$$

Оваа брзина има компонента само по x -насоката која е паралелна со подлогата. Од Законот за запазување на импулсот имаме дека вкупниот импулс пред и по судирот треба да биде еднаков

$$\vec{p} = \vec{p}'.$$

Според тоа:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2';$$

кадешто v_1 е брзината на телото 1 пред судирот, v_1' е брзината на телото 1 по судирот, а v_2 и v_2' се брзините на телото 2 пред и по судирот, соодветно. Пред судирот телото 2 мирувало и поради тоа $v_2 = 0 \text{ m/s}$. Земајќи ја предвид насоката на движење од горната равенка, за брзината на телото 2 по судирот, добиваме:

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_1 v_1'}{m_2} = \frac{3 \text{ kg} \cdot 6,26 \text{ m/s} + 3 \text{ kg} \cdot 1,56 \text{ m/s}}{5 \text{ kg}} = 4,7 \text{ m/s}.$$

Пресметаната брзина претставува почетна брзина на телото 2 за понатамошното движење кое всушност претставува хоризонтален истрел

$$v_{2x} = v_2'.$$

Дометот ќе го определиме од формулата:

$$D = v_{2x} t,$$

кадешто времето потребно телото 2 да падне во количката ќе го определиме преку висината на масата.

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 0,4 \text{ s.}$$

За дометот се добива:

$$D = v_{2x}t = 1,88 \text{ m.}$$

б) За да ја определиме брзината на количката заедно со телото 2 во неа, повторно ќе го искористиме Законот за запазување на импулс. Внимаваме дека импулсот е векторска величина, па во овој случај ќе ги разгледаме само хоризонталните компоненти, бидејќи количката по судирот ќе се движи по хоризонтален правец. Во овој случај станува збор за нееластичен судир, па:

$$m_2 \vec{v}_2 = (m_2 + M) \vec{v}'.$$

Знаејќи дека хоризонталната компонента на брзината при хоризонтален истрел е константна, запишано по x компоненти, Законот за запазување на импулс во овој случај би гласел:

$$m_2 v_{2x} = (m_2 + M) v'.$$

Брзината на количката заедно со телото 2 во неа би била:

$$v' = \frac{m_2 v_{2x}}{(m_2 + M)} = \frac{5 \text{ kg} \cdot 4,7 \text{ m/s}}{5 \text{ kg} + 12 \text{ kg}} = 1,38 \text{ m/s.}$$

Забелешка: Делот **а)** носи 12 поени, додека, пак делот **б)** носи 8 поени. Ако ученикот напише само општи формули за законите за запазување и хоризонтален истрел, без да продолжи да решава, се доделуваат најмногу 4 поени за целата задача. За погрешно пресметани нумерички вредности се одземаат по 2 поена, а за незапишување на единицата мерка во која се изразуваат конечните резултати се одзема по 1 поен.

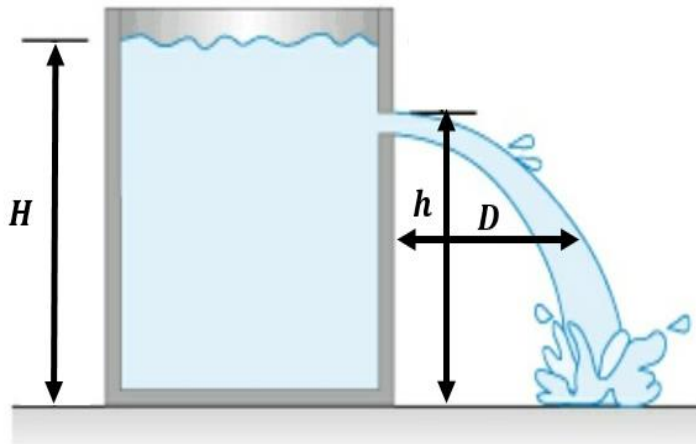
Задача 5. Цилиндричен сад е наполнет со течност до висина $H = 1,3 \text{ m}$ мерено од површината на Земјата. На висина $h = 25 \text{ cm}$ (исто мерено од површината на Земјата) се наоѓа отвор на бочната страна од садот. Да се определи:

а) брзината со која водата ќе истекува од садот;

б) брзината со која ќе истекува водата од истиот сад, ако садот се постави на друга планета, чијашто густина е иста како и онаа на планетата Земја ($\rho_p = \rho_z$), а радиусот на таа планета е даден со $R_p = 0,6R_z$, каде што R_z е радиусот на Земјата.

в) Како ќе се разликува максималниот хоризонтален домет, којшто ќе го достигне водата што истекува од отворот во двата случаја (кога садот е поставен на Земјата и кога садот е поставен на другата планета)?

Земјиното забрзување изнесува $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Слика 5

Решение:

а) Со користење на Торичелиевата равенка можеме да ја определиме брзината со која водата ќе истекува од дупката на садот.

$$v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2g(H-h)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1,3 \text{ m} - 0,25 \text{ m})} = 4,54 \text{ m/s}.$$

б) Другата планета има иста густина, но различен волумен од планетата Земјата. Поради ова и масата на планетата ќе се разликува од масата на Земјата. Масата на другата планета ќе биде:

$$M_p = \rho_p V_p = \rho_p \frac{4}{3} \pi R_p^3.$$

Ако замениме дека $\rho_p = \rho_z$ и $R_p = 0,6R_z$ за масата на планетата добиваме:

$$M_p = \rho_z \frac{4}{3} (0,6R_z)^3 \pi = 0,216 \rho_z \frac{4}{3} R_z^3 \pi.$$

Ако искористиме дека:

$$M_z = \rho_z \frac{4}{3} R_z^3 \pi,$$

За масата на другата планета се добива:

$$M_p = 0,216 M_z.$$

Бидејќи двете планети имаат различни маси и радиуси, ќе имаат и различни забрзувања кои може да се пресметаат согласно формулата:

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Забрзувањето на површината на другата планета ќе биде:

$$g_p = \gamma \frac{0,216M_z}{(0,6R_z)^2} = 0,6 \cdot \gamma \frac{M_z}{R_z^2} = 0,6 \cdot g_z = 5,9 \text{ m/s}^2.$$

Користејќи ја повторно Торичелиевата равенка и соодветното забрзување за другата планета, се добива дека таму водата ќе истекува со брзина:

$$v = \sqrt{2g_p \Delta h} = \sqrt{2g_p (H - h)} = \sqrt{2 \cdot 5,9 \text{ m/s}^2 \cdot (1,3 \text{ m} - 0,25 \text{ m})} = 3,5 \text{ m/s}.$$

в) Домотот може да го определиме според:

$$D = vt,$$

кадешто v е брзината со која водата истекува од дупката (определена според Торичелиевата равенка)

$$v = \sqrt{2g(H - h)},$$

а пак t е времето за кое паѓа водата

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Со заменување на соодветните формули за брзината и времето во равенката за домотот се добива:

$$D = vt = \sqrt{2g(H - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4(H - h)h}.$$

Од добиената равенка за домотот може да се види дека тој не зависи од забрзувањето на површината на планетите, туку само од висинскиот столб на водата и положбата на отворот. Поради ова и на двете планети домотот ќе има иста вредност.

Забелешка: Делот **а)** се наградува со 4 поени, делот **б)** со 10 поени, а пак делот **в)** со 6 поени. Ако во делот **б)** ученикот само го запише Њутновиот закон за гравитација и не продолжил да решава, се доделуваат 2 поена за тој дел. Ако во делот **в)** ученикот само ја запише релацијата за домотот, но не продолжил да решава, се доделуваат исто така 2 поена. За погрешно пресметани нумерички вредности се одземаат по 2 поена, а за незапишување на единицата мерка во која се изразуваат конечните резултати се одзема по 1 поен