66. РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА
20 април 2024

IV година
(решенија на задачите)

Задача 1. Летало во форма на цилиндар со висина H и радиус на основата R се движи во правец на својата оска со брзина $v = kc$, каде што $0 < k < 1$, а c брзината на светлината.
а) Како и за колку пати ќе се промени висината на цилиндарот во однос на неподвижен набљудувач?
б) Колкав ќе биде волуменот на цилиндарот, мерен во однос на референтниот систем поврзан со него, а колкав во однос на неподвижниот набљудувач?

Решение:

а) Според специјалната теорија на релативност, во правецот на движење на цилиндарот, настанува скратување (контракција) на должината, односно висината на цилиндарот ќе се намали. Од релацијата за контракција на должината се добива

$$H' = H\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = H\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{c^2}} = H\sqrt{1-k^2}\ .$$

Значи, односот на висините H'/H ќе биде $\sqrt{1-k^2}$.

б) Волуменот во однос на самиот цилиндар (сопствениот волумен) ќе изнесува

$$V = R^2\pi H,$$

а во однос на неподвижниот набљудувач

$$V' = R^2\pi H\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = V\sqrt{1-\frac{k^2c^2}{c^2}} = V\sqrt{1-k^2}.$$

Забелешка: Делот **а)** носи 12 поени, додека делот **б)** носи 8 поени.

Задача 2. Негативно наелектризиран пион, чијашто кинетичка енергија е $T_\pi = 50$ MeV, во лет се распаѓа на мион и неутрино. После распадот, неутриното почнало да се движи под прав агол во однос на правецот на движење на пионот.
а) Да се одреди енергијата на неутриното.
б) Колкаво е средното време на живот на мионот, измерено во однос на лабораторискиот систем, ако сопственото средно време на живот на мионот е $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s?
Масата на мирување на неутриното е еднаква на нула, а пак, масите на мирување на пионот и мионот се еднакви на $m_\pi = 139,6$ MeV/c^2 и $m_\mu = 105,66$ MeV/c^2, соодветно.

Решение:
а) Според законот за запазување на импулсот, може да се запише:
$$\vec{p}_\mu = \vec{p}_\pi - \vec{p}_\nu.$$

Со квадрирање на оваа релација, имајќи притоа предвид дека векторите $\vec{p}_\pi$ и $\vec{p}_\nu$ се заемно нормални, се добива:
$$p_\mu^2 = p_\pi^2 + p_\nu^2,$$

што може да се запише како
$$E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4 = T_\pi \left(T_\pi + 2m_\pi c^2\right) + E_\nu^2,$$

при што беа искористени релациите:
$$p_\pi = \frac{1}{c}\sqrt{T_\pi \left(T_\pi + 2m_\pi c^2\right)};$$
$$E_\mu^2 = p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4;$$
$$E_\nu = p_\nu c.$$

Согласно законот за запазување на енергијата, пак, може да се запише релацијата:
$$T_\pi + m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu.$$

Оттука, со елементарни математички трансформации, се добива енергијата на неутриното:
$$E_\nu = \frac{\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)c^4}{2\left(T_\pi + m_\pi c^2\right)} \approx 22 \text{ MeV}.$$

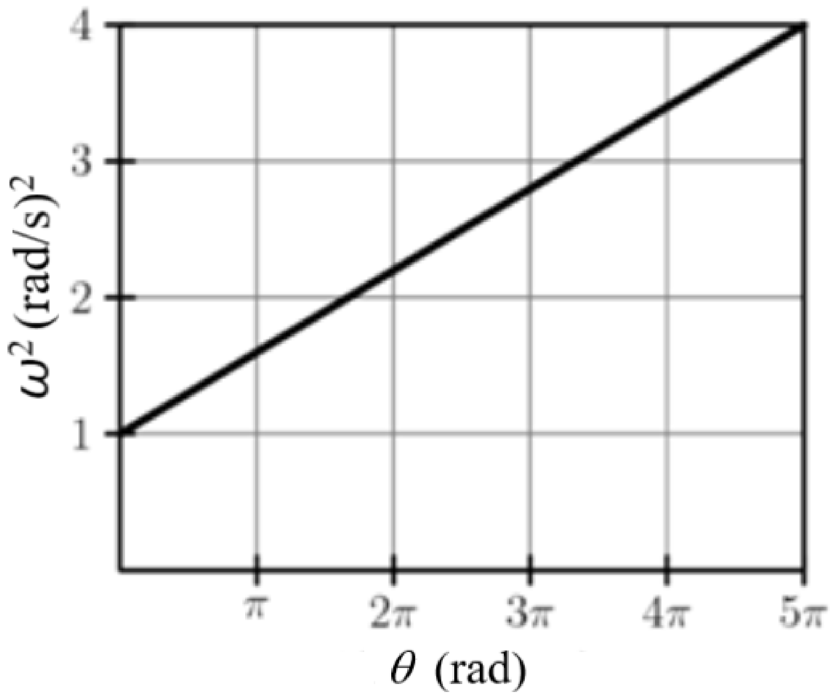
б) Преку добиената енергија на неутриното, може да се одреди и вкупната енергија на мионот:
$$E_\mu = T_\pi + m_\pi c^2 - E_\nu.$$

Од друга страна, за вкупната енергија на мионот важи:
$$E_\mu = \gamma m_\mu c^2, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}}.$$

Конечно, изразувајќи го $\gamma -$ факторот од погорната релација, може да се одреди бараното средно време на живот:
$$\tau = \gamma \tau_0 = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2}\tau_0 = \frac{T_\pi + m_\pi c^2 - E_\nu}{m_\mu c^2}\tau_0 = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Забелешка: Делот **а)** носи 14 поени, додека делот **б)** носи 6 поени. Ако во делот **а)** ученикот ги запише само законите за запазување на енергијата и импулсот, и не продолжил да решава, се доделуваат по 3 поени за секоја од равенките. Ако во делот **б)** ученикот ја запише само релативистичката формула за енергијата и не продолжил да решава, се доделуваат 2 поена. За секоја погрешно пресметана конечна вредност се одземаат 2 поена, а за секое незапишување на единицата во која се изразува конечниот резулат се одзема по 1 поен.

Задача 3. Тркало со момент на инерција од 50 kg m^2 ротира, така што квадратот од аголната брзина во зависност од аголното поместување (аголот на завртување) θ се менува според дадениот график. Да се одреди големината на моментот на силата, којшто ја предизвикува ротацијата на тркалото.



Слика 1

Решение:
Да забележиме дека квадратот од аголната брзина линеарно расте со аголното поместување, што значи дека станува збор за рамномерно забрзана ротација, кај којашто аголната брзина во зависност од аголното поместување е дадена со

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta = \omega_0^2 + 2\alpha\theta,$$

каде што α е аголното забрзување, а ω_0 почетната аголна брзина.
Според условот на задачата $(\theta_0(t) = 0)$, односно $\Delta\theta(t) = \theta(t)$. Оваа релација се изведува, доколку од основните кинематички закони за рамномерно забрзано ротационо движење се елиминира времето, на следниот начин:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \Rightarrow \Delta\theta = \theta - \theta_0 = \omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} + \frac{\alpha(\omega - \omega_0)^2}{2\alpha^2},$$

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta.$$

За да се одреди големината на моментот на силата τ, којшто ја предизвикува ротацијата ќе искористиме дека $\tau = I\alpha.$

Ако се отчитаат вредностите од првата и последната точка од графикот, едноставно може да се пресмета аголното забрзување, а потоа и моментот на сила, според релациите

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta},$$

$$\tau = I\alpha,$$

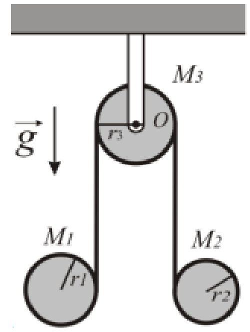
$$\tau = I\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta},$$

$$\tau = 50\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,\frac{(4-1)(\mathrm{rad/s})^2}{2\cdot 5\pi\ \mathrm{rad}} = \frac{15}{\pi}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 4{,}78\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}.$$

Забелешка: Ако ученикот точно забележи дека на графикот е претставена рамномерно забрзана ротација се доделуваат 2 поена. За точно запишување (или изведување) на врската помеѓу аголната брзина и аголното поместување при рамномерно забрзана ротација се доделуваат 5 поени. За точно запишување на Њутновиот закон за ротација, се доделуваат 3 поени. Комбинирањето на релациите, заедно со правилно отчитување на вредностите од графикот и точен нумерички резултат се наградуваат со преостанатите 10 поени.

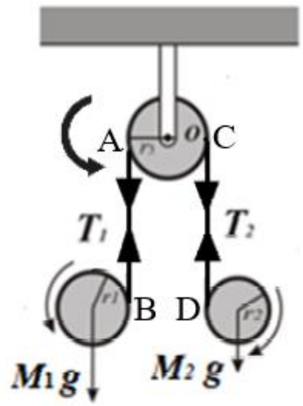
За секоја погрешно пресметана конечна вредност се одземаат 2 поена, а за секое незапишување на единицата во која се изразува конечниот резултат се одзема по 1 поен.

Задача 4. На две хомогени макари, коишто имаат маси M_1 и M_2 и радиуси r_1 и r_2, соодветно, намотан е лесен нерастеглив конец, којшто е префрлен преку хомогена макара со маса M_3 и радиус r_3, како што е прикажано на Сл. 2. Макарата со маса M_3 ротира без триење околу оската О (нејзината оска на симетрија). Макарите со маси M_1 и M_2 паѓаат надолу одмотувајќи го конецот, така што тој не пролизгува во однос на макарите и постојано е вертикален. Да се одреди аголното забрзување на макарата со маса M_3. Моментот на инерција на секоја од макарите се пресметува со $I = MR^2/2$, каде што M е масата, а R радиусот на макарата.



Слика 2

Решение:
На Сл. 2а се прикажани силите коишто дејствуваат во системот, како и претпоставената насока на ротација на макарата со маса M_3.



Слика 2а

За макарата со маса M_1 важи:

$$M_1 a_1 = M_1 g - T_1,$$
$$\frac{M_1 r_1^2}{2}\alpha_1 = T_1 r_1,$$

а за макарата со маса M_2 :

$$M_2 a_2 = M_2 g - T_2,$$
$$\frac{M_2 r_2^2}{2}\alpha_2 = T_2 r_2.$$

Динамиката на ротацијата на третата макара е опишана со равенката:

$$\frac{M_3 r_3^2}{2}\alpha_3 = \left(T_1 - T_2\right) r_3.$$

Во точката А, означена на сликата, тангенцијалното забрзување на макарата со маса M_3 е еднакво на $\alpha_3 r_3$ и е насочено вертикално надолу. Бидејќи конецот не пролизгува во однос на макарата, и неговото забрзување во точката А е еднакво на $\alpha_3 r_3$. Од истата причина, во точката В, забрзувањето на конецот е еднакво на векторскиот збир на забрзувањето на центарот на маса на макарата со маса M_1 и нејзиното тангенцијално забрзување, коешто се должи на ротацијата. Модулот на овој вектор е еднаков на $a_1 - \alpha_1 r_1$. Сите точки од конецот, помеѓу точките А и В имаат еднакво забрзување, па може да се запише:

$$a_1 - \alpha_1 r_1 = \alpha_3 r_3.$$

Со слично резонирање, применето на точките C и D, се добива и релацијата:

$$\alpha_2 r_2 - a_2 = \alpha_3 r_3.$$

Од горните равенки, со елиминација на силите на затегнување на конецот, се добива системот равенки:

$$r_1\alpha_1 + r_3\alpha_3 = g - \frac{r_1\alpha_1}{2}$$

$$r_2\alpha_2 - r_3\alpha_3 = g - \frac{r_2\alpha_2}{2} \quad ,$$

$$M_1 r_1\alpha_1 - M_2 r_2\alpha_2 = M_3 r_3\alpha_3$$

од каде што за бараното аголно забрзување се добива:

$$\alpha_3 = \frac{g}{r_3}\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \frac{3}{2}M_3}.$$

Забелешка: За точно запишување на секоја од 5-те равенки кои доаѓаат од вториот Њутнов закон се доделуваат по 2 поена. За точно запишување на равенките кои доаѓаат од условот конецот да е нерастеглив и да не пролизгува се доделуваат по 2 поена. Решавањето на системот равенки и добивање на крајната релација за аголното забрзување се наградува со преостанатите 6 поени.

Задача 5. Нерелативистичка квантна честичка со маса m се движи во еднодимензионална потенцијална јама со бесконечно високи ѕидови, така што зависноста на нејзината потенцијална енергија од координатата е дадена со:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le L, \\ \infty, & x > L \end{cases}$$

каде што L е ширината на јамата. Честичката во ваквиот потенцијал не може да има произволна вредност на енергијата, туку дозволените енергии на честичката образуваат дисконтинуиран спектар $E_1 < E_2 < \ldots < E_n < \ldots$, каде што со n е означен квантниот број којшто ја определува квантната состојба, при што најмалата енергија E_1 одговара на основната состојба.

а) Со примена на Хајзенберговиот принцип на неопределеност, да се процени минималната енергија којашто може да ја има честичката во потенцијалната јама. За неопределеноста на координатата на честичката да се земе дека е еднаква на полуширината на потенцијалната јама.

б) Честичката во ваквата потенцијална јама може да се разгледува како де Брољиевски стоен бран со јазли на ѕидовите на јамата. Да се одредат можните енергии на честичката, E_n, каде што $n = 1, 2, 3\ldots$

в) Колкава е брановата должина на фотонот емитиран кога честичката преминува од првата екситирана во основната состојба?

г) Како што е познато, состојбата на квантната честичка се опишува со бранова функција $\Psi(x)$, при што величината $|\Psi(x)|^2$ претставува густина на веројатноста за наоѓање на честичката во точка со координата x. Во конкретниов случај, на состојба со енергија E_n ѝ соодветствува бранова функција којашто е еднаква на нула во сите точки надвор од потенцијалната јама, а во внатрешноста на јамата е дадена со $\Psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \sin\dfrac{n\pi x}{L}$. Да се одреди најверојатната положба на честичката, ако таа се наоѓа во првата екситирана состојба.

Решение:

а) Доколку за неопределеноста на координатата се земе:

$$\Delta x = \frac{L}{2},$$

користејќи го Хајзенберговиот принцип на неопределеност:

$$\Delta p\, \Delta x \ge \hbar$$

и земајќи дека максималната неопределеност на импулсот не може да биде поголема од вредноста на импулсот, се добива:

$$p \ge \Delta p \ge \frac{2\hbar}{L}.$$

Бидејќи потенцијалната енергија на честичката во внатрешноста на јамата е еднаква на нула, вкупната енергија на честичката ќе биде еднаква на нејзината кинетичка енергија:

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

од каде што следува:

$$E \ge \frac{2\hbar^2}{mL^2} \Rightarrow E_{\min} = \frac{2\hbar^2}{mL^2} = \frac{h^2}{2\pi^2 mL^2}.$$

б) Де Брољиевата бранова должина на честичката е дадена со:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

а условот којшто треба да биде исполнет за да се формира стоен бран помеѓу ѕидовите на јамата е:

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

па користејќи ги овие две релации, се добиваат дозволените енергии на честичката:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

в) За бараната бранова должина имаме:

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{8mcL^2}{3h}.$$

г) За првата екситирана состојба важи $n = 2,$ па најверојатната положба на честичката е онаа во којашто функцијата $\sin^2 \frac{2\pi x}{L}$ има максимална вредност. Тоа е исполнето во точките за коишто важи:

$$\sin\frac{2\pi x}{L} = \pm 1,$$

а во областа $0 \le x \le L,$ каде што честичката е ограничена да се движи, тоа се точките:

$$x = \frac{L}{4}, \qquad x = \frac{3L}{4}.$$

Забелешка: Делот **а)** носи 6 поени, делот **б)** 5 поени, делот **в)** 4 поени и делот **г)** носи 5 поени.