РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. (15 поени) Во познатата анализа од 1930-тата година, индискиот физичар Субрахманјан Чандрасекар ја проучувал стабилноста на ѕвездите. Оваа задача ќе ви помогне да конструирате поедноставена верзија на таа анализа. Во продолжение од задачата можете да ги користите следниве константи:
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s;
$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js;
$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2;
$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg;
$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.
а) (4 поени) Разгледајте сферна ѕвезда со рамномерна густина, радиус R и маса M. Изведете го следниот израз за гравитационата потенцијална енергија (E_G), поради сопственото гравитационо поле (сопствената гравитациона енергија):
$$E_G = -\frac{3}{5}\frac{\gamma M^2}{R}. \tag{1}$$
б) (3 поени) Ќе претпоставиме дека ѕвездата е составена само од водород и дека целиот водород е во јонизирана форма. Разгледуваме случај во којшто производството на енергија во ѕвездата (преку нуклеарна фузија) веќе запрело. Електроните се покоруваат на Паулиевиот принцип, па нивната вкупна енергија може да се пресмета преку квантната статистика. Оттаму се добива следниот израз за вкупната енергија на електроните:
$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R^2}, \tag{2}$$
каде што со N_e е означен вкупниот број електрони, а пак, $\hbar = h/(2\pi)$ ја претставува редуцираната Планкова константа. Да се добие радиусот на ѕвездата којашто е во рамнотежа. Овој радиус се нарекува радиус на бело џуџе - R_{WD}.
в) (1 поен) Да се пресмета нумеричката вредност на R_{WD} за ѕвезда со еднаква маса, како онаа на Сонцето ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg).
г) (1,5 поен) Претпоставувајќи дека распределбата на електроните е хомогена, да се добие проценка за редот на големина на средното растојание меѓу електроните (r_{sep}), ако радиусот на ѕвездата е веќе пресметан во делот в).
д) (2,5 поени) Сега, да ја пресметаме брзината на електроните. За таа цел, да претпоставиме дека секој електрон формира стоен бран во еднодимензионална кутија со должина r_{sep}. Со примена на де Брољиевата хипотеза, да се пресмета брзината на електронот (v) во основна состојба.
ѓ) (1,5 поен) Нека разгледаме измена на анализата дадена во делот б). Ако земеме дека

електроните се ултрарелативистички ($E = pc$), со слична анализа се добива дека

$$E_e^{rel} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R} N_e^{4/3}. \tag{3}$$

Да се добие израз за масата на ѕвездата, која за овој случај е во рамнотежа. Оваа маса ја нарекуваме критична маса (M_C).

е) (1 поен) Ако масата M на ѕвездата е поголема од критичната маса M_C добиена во делот ѓ), одредете дали ѕвездата ќе се собира или шири.

ж) (0,5 поени) Изразете ја масата M_C во единица соларна маса ($M_\odot$).

Решение:

а) Да разгледаме сферна лушпа со дебелина dr која се наоѓа на растојание r од центарот на ѕвездата. Нека ρ е густината на ѕвездата. Тогаш, гравитационата потенцијална енергија е еднаква на:

$$dE_G = -\gamma \frac{(4/3\pi r^3 \rho)(4\pi r^2 dr \rho)}{r}, \tag{4}$$

односно:

$$E_G = \int_0^R dE_G = -\frac{3}{5}\frac{\gamma M^2}{R}. \tag{5}$$

б) Вкупната енергија на ѕвездата е еднаква на $E = E_G + E_e$. Во рамнотежа, кога $R = R_{WD}$ исполнет е следниот услов:

$$\frac{dE}{dR} = 0. \tag{6}$$

Со искористување на експлицитните релации добиваме

$$\frac{3\gamma M^2}{5R_{WD}^2} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{2N_e^{5/3}}{R_{WD}^3}, \tag{7}$$

од каде што се добива

$$R_{WD} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{6\gamma m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{2N_e^{5/3}}{M^2}. \tag{8}$$

в) Бидејќи водородот е целосно јонизиран, бројот на протони (водородни јадра) е ист со бројот на електрони: $N_p = N_e$. Од друга страна: $m_p >> m_e$, па

$$N_e = N_p \approx \frac{M}{m_p}. \tag{9}$$

Конечно, се добива

$$R_{WD} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{6\gamma m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{2}{M^{1/3} m_p^{5/3}} = 2,28 \cdot 10^4 \ \text{km}. \tag{10}$$

г)Ако r_{sep} е средното растојание помеѓу електроните, тогаш

$$N_e \frac{4}{3}\pi r_{sep}^3 \approx \frac{4}{3}\pi R_{WD}^3. \tag{11}$$

Затоа

$$r_{sep} \approx R_{WD}\left(\frac{m_p}{M}\right) = 2,13 \cdot 10^{-12} \;\; \text{m}. \tag{12}$$

д) За честичка заробена во кутија со должина r_{sep}, нејзината де Брољиева бранова должина λ_{dB} во основната состојба може да се запише како

$$\lambda_{dB} = 2r_{sep}, \tag{13}$$

а пак импулсот е еднаков на

$$p = \frac{h}{\lambda_{dB}}, \tag{14}$$

па

$$v = \frac{p}{m_e} \approx 1,08 \cdot 10^8 \ \ \text{m/s}. \tag{15}$$

Ако пак за брзината се искористи релативистичка формула, се добива

$$v = 1,06 \cdot 10^8 \ \ \text{m/s}. \tag{16}$$

ѓ) Слично на делот б), во рамнотежа исполнето е

$$\frac{3}{5}\gamma\frac{M^2}{R^2} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3}\frac{\hbar c}{R^2}N_e^{4/3}. \tag{17}$$

За критичната маса се добива

$$M_c = \frac{3(5^3\pi)^{1/2}}{16m_p^2}\left(\frac{\hbar c}{\gamma}\right)^{3/2}. \tag{18}$$

е) Кога масата на ѕвездата е поголема од критичната, таа ќе се собира.
ж) Со употреба на вредностите од условот на задачата, конечно се добива

$$M_c = 1,36 \cdot 10^{31} \ \ \text{kg} = 6,8M_{\odot}. \tag{19}$$

2. (10 поени) Пјер Ферма покажал дека секогаш кога светлината патува од една до друга точка, таа го избира оној пат за којшто е потребен најкраток временски интервал. Овој заклучок е познат како принцип на Ферма. Наједноставниот пример кој го илустрира овој принцип е патувањето на светлината во хомогена средина. Во тој случај светлината се движи по права линија, бидејќи правата линија е најкраткото растојание помеѓу две точки.

   Наша цел е, со користење на принципот на Ферма, да го изведеме Снеловиот закон за прекршување. За таа цел ќе постапиме на следниов начин. На сликата е прикажан светлински зрак кој патува од точката P во средината 1, до точката Q во средината 2. Тие две точки се наоѓаат на нормални растојанија a и b од границата соодветно. Хоризонталното растојание пак, помеѓу двете точки е обележано со d. Со x да ја обележиме хоризонталната координата на точката во која зракот влегува во вториот медиум. Нека во $t = 0$ зракот почнува да се шири од точката P. Индексите на прекршување на средините 1 и 2, се еднакви на n_1 и n_2, соодветно.

   а) 1 поен Покажи дека времето, коешто му е потребно на зракот да стигне до точката Q е дадено со

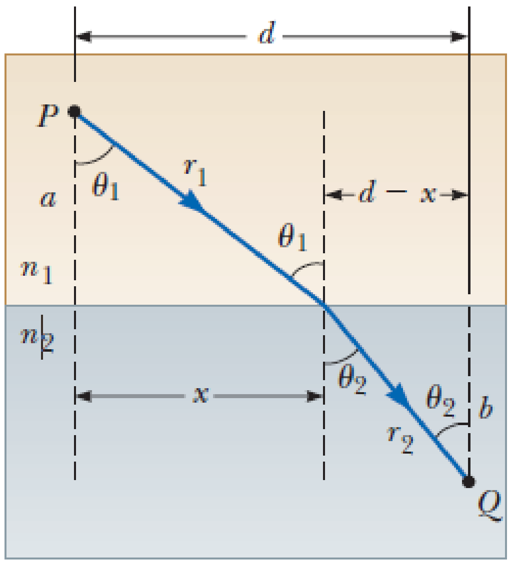
$$t = \frac{n_1\sqrt{a^2+x^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c}. \tag{20}$$

   б) (2 поена) Минимизирајќи го времето, коешто ѝ е потребно на светлината да стигне од точката P до точката Q, да се покаже дека растојанието x ја задоволува следнава равенка:

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{n_2(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}. \tag{21}$$

   в) (2 поена) Покажи дека од последната релација произлегува законот на Снелиус-Декарт.

   г) (5 поени) Аналогно како во случајот на законот за прекршување (законот на Снелиус-Декарт), користејќи го принципот на Ферма, изведи го законот за рефлексија.



Слика 1: Патот на зракот од точката P до точката Q

Решение:

а) Времето, коешто ѝ е потребно на светлината да стигне од точката P до точката Q, можеме да го запишеме како

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2}. \tag{22}$$

Но: $v_1 = \frac{c}{n_1}$ и $v_2 = \frac{c}{n_2}$, па користејќи ја Питагоровата теорема добиваме

$$t = \frac{n_1\sqrt{a^2+x^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c}. \tag{23}$$

б) За времето да биде минимално, потребно е првиот извод на времето како функција од промелнивата x да биде еднаков на 0, односно

$$\frac{dt}{dx} = 0 \tag{24}$$

Ако експлицитно го најдеме изводот добиваме

$$\frac{2n_1 x}{2c\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{2(d-x)n_2}{2c\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0, \tag{25}$$

односно

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{(d-x)n_2}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}. \tag{26}$$

в) Од цртежот даден во условот на задачата забележуваме дека

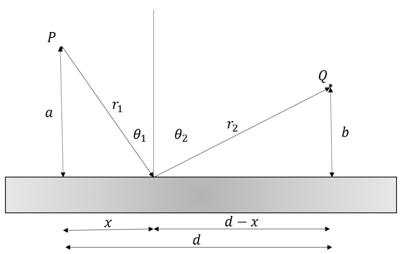
$$\sin\theta_1 = \frac{x}{r_1} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}; \tag{27}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{d-x}{r_2} = \frac{d-x}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}; \tag{28}$$

Ако сега се вратиме во равенката (26), добиваме

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2. \tag{29}$$

г) На сликата е даден еден произволен случај, исто како во случајот со прекршувањето (формата на површината од која се одбиваат зраците воопшто не игра улога во понатамошното изведување).



Слика 2: Патот на зракот од прозволна точка P до произволна точка Q, кога наидува на површина од која се одбива

Аналогно како во првиот дел од задачата, запишуваме

$$t = \frac{r_1}{v} + \frac{r_2}{v} = \frac{r_1 + r_2}{v} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v}. \tag{30}$$

Со минимизирање на времето ($dt/dx = 0$) се добива

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}. \tag{31}$$

Но: $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{r_1} = \sin\theta_1$, $\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \frac{d-x}{r_2} = \sin\theta_2$, па добиваме

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2, \tag{32}$$

односно

$$\theta_1 = \theta_2. \tag{33}$$

3. (10 поени) Полнежот на електронот за прв пат бил измерен од страна на американскиот физичар Роберт Миликен. Во својот експеримент, Миликен употребувал капки од масло (со дијаметар од околу 10^{-4} mm), коишто ги поставувал во просторот помеѓу две паралелни хоризонтални плочи. Хоризонталните плочи се наоѓале на меѓусебно растојание d и кон нив била приложена потенцијална разлика V_{AB}. На тој начин се формирало електрично поле кое било насочено од горната кон долната плоча. Поради различни појави, дел од капките добивале негативен полнеж. Тие капки биле од особен интерес и можеле да се набљудуваат преку микроскоп.

а) (2 поена) Покажи дека дадена капка со радиус r, може да биде во рамнотежа во меѓупросторот на плочите, само ако нејзиниот полнеж е еднаков на

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{r^3 g d}{V_{AB}}, \tag{34}$$

каде со g го обележавме Земјиното забрзување, а пак со ρ ја обележавме густината на маслото. Занемарете ја Архимедовата сила.

Со прилагодување на напонот V_{AB}, Миликен можел да го одреди полнежот на капката, под претпоставка дека го знаел радиусот на истата.

б) (2 поена) Сепак, радиусот на капките бил премногу мал за директно да биде измерен. Затоа, Миликен го определувал радиусот на капките со тоа што го исклучувал електричното поле и ја мерел терминалната (максималната) брзина - v_t, којашто капките ја постигнувале. Таа брзина е условена од силата на вискозност, која за сфера со радиус r и брзина v што минува низ флуид со вискозност η, е дадена со изразот

$$F = 6\pi\eta r v. \tag{35}$$

Покажи дека големината на полнежот може да се пресмета преку релацијата

$$q = 18\pi\frac{d}{V_{AB}}\sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}. \tag{36}$$

в) (2 поена) Сега претпоставете дека вие сте го извршиле експериментот на Миликен, но за четири различни капки. Вредностите кои сте ги добиле се наоѓаат во следнава табела:

Капка	1	2	3	4
$V_{AB}(V)$	9,16	4,57	12,32	6,28
$v_t(10^{-5}$ m/s)	2,54	0,767	4,39	1,52

Во апаратурата која вие сте ја користеле, растојанието d помеѓу хоризонталните плочи било еднакво на 1 mm. Густината на маслото е еднаква на 824 kg/m^3. За вискозноста η на воздухот може да се употреби вредноста $1,81 \cdot 10^{-5}$ Ns/m^2. Земајќи $g = 9,81$, пресметајте го полнежот q на секоја од капките.

г) (2 поена) Ако електричниот полнеж е квантуван, тогаш полнежот на капките мора да биде еднаков на $-ne$, каде што n е природен број, а пак, e е елементарниот полнеж (полнежот на еден електрон). Капката 2 има најмал радиус од сите капки кои биле набљудувани, па претпоставете дека нејзиниот полнеж се должи на вишокот на само еден електрон. Пресметајте го вишокот на електрони, коишто придонесуваат за полнежот на останатите три капки.
д) (2 поена) Знаејќи дека полнежот на капките е еднаков на $|q| = ne$, пресметајте ја средната вредност за елементарниот полнеж e, којашто се добива од сите четири капки кои сте ги мереле во експериментот.

Решение:

а) За капката да биде во рамнотежа, потребно е тежината на капката да биде еднаква со електричната сила

$$mg = |q|E = |q|\frac{V_{AB}}{d}, \tag{37}$$

односно

$$|q| = \frac{mgd}{|q|V_{AB}} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{r^3 gd}{V_{AB}}. \tag{38}$$

б) Максималната брзина се добива тогаш, кога Земјината тежа се изедначува со Стоксовата сила на триење. Затоа

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_t. \tag{39}$$

Оттука имаме

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_t}{2\rho g}}. \tag{40}$$

Ако сега се вратиме во равенката за големината на полнежот, добиваме

$$|q| = 18\pi\frac{d}{V_{AB}}\sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}. \tag{41}$$

в) Со директна замена на вредностите во формулата за полнежот се добиваат следниве вредности:
Капка 1: $4,79 \cdot 10^{-19}$ C,
Капка 2: $1,59 \cdot 10^{-19}$ C,
Капка 3: $8,09 \cdot 10^{-19}$ C,
Капка 4: $3,23 \cdot 10^{-19}$ C.
г) Земајќи дека $n = q/e_2$ се добива
Капка 1: $n = 3$,
Капка 2: $n = 1$,
Капка 3: $n = 5$,
Капка 4: $n = 2$.
д) Средната вредност е еднаква на:

$$e_{av} = \frac{q_1/n_1 + q_2/n_2 + q_3/n_3 + q_4/n_4}{4} = 1,61 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \tag{42}$$