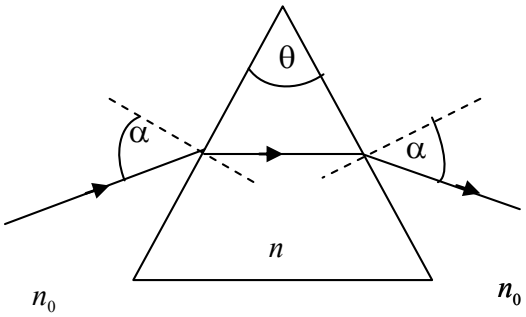
45 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА 2012

III година

(решенија на задачите)

1. Рамностана стаклена призма чиј агол при врвот е $\theta = 60^0$ поставена е во положба на минимална девијација за жолтата светлина. Светлината паѓа врз една од страните на призмата под агол $\alpha = 53^0$ (аголот се мери во однос на нормалата на страната). Да се определи аголот на минимална девијација за дадената светлина, како и индексот на прекршување на стаклото од кое е направена призмата. Околната средина е воздух. (Во случај на минимална девијација зракот кој излегува од другата страна на призмата зафаќа агол $\alpha = 53^0$ со нормалата на таа страна - види сл. 1). Со колкава брзина се простира зракот во призмата?



Сл. 1

Решение:

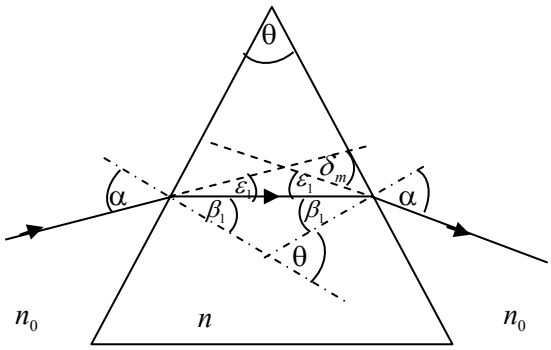
Од условот на задачата следува дека аголот на прекршување на првата гранична површина е еднаков на аголот под кој зракот упаѓа на втората гранична површина, и овие два агли ги означуваме со β_1 (види сл. 1р).

Од геометријата на цртежот следува

$$\theta = 2\beta_1 ,$$

$$\delta_m = 2\varepsilon_1 ,$$

$$\alpha = \beta_1 + \varepsilon_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{\delta_m}{2} .$$



Сл. 1р

Од претходната релација изразуваме $\delta_m = 2\alpha - \theta$.

$$\boxed{\delta_m = 46^0.}$$

Од законот за прекршување на првата гранична површина $n_0 \sin\alpha = n \sin\beta_1$, изразуваме

$$n = \frac{n_0 \sin\alpha}{\sin\beta_1} .$$

Земајќи $n_0 = 1$, $\beta_1 = \theta/2 = 30^0$, се добива

$$\boxed{n = 1{,}6}.$$

Додека, брзината на светлината во призмата е

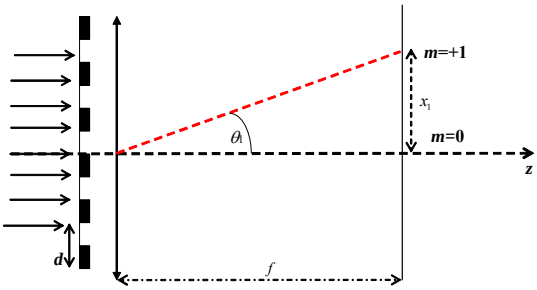
$$\boxed{v = c / n = 1{,}9 \cdot 10^8 \text{ m/s}}.$$

2. Паралелен сноп монохроматска светлина со позната бранова должина $\lambda_1 = 632{,}8\,\text{nm}$ паѓа нормално на површината на дифракциона мрежичка. Позади мрежичката поставена е собирна леќа со фокусно растојание f. Во фокусната рамнина на леќата се набљудува дека положбата на максимумот од првиот дифракционен ред е на растојание $x_1 = 10{,}0\,\text{mm}$ во однос на централниот максимум (од нулти ред). Понатаму, врз истата мрежичка, нормално на нејзината површина паѓа паралелен сноп монохроматска светлина (од друг ласер) со бранова должина λ_2. Во фокусната рамнина на леќата се набљудува дека положбата на максимумот од првиот дифракционен ред сега е на растојание $x_1^{'} = 8{,}12\,\text{mm}$ во однос на централниот максимум. Да се определи λ_2.

Да се претпостави дека аголот под кој се набљудува првиот дифракционен максимум е многу мал така што важи: $\sin\theta \approx \text{tg}\theta \approx \theta$.

Решение:

Аглите под кои се дифрактирала светлината во првиот дифракционен максимум ги определуваме според равенките



$$d\sin\theta_1 = \lambda_1, \qquad (1)$$

$$d\sin\theta_1^{'} = \lambda_2, \qquad (2)$$

каде со d е означен периодот на мрежичката. Оттука изразуваме

$$\sin\theta_1 = \lambda_1 / d,$$

$$\sin\theta_1^{'} = \lambda_2 / d.$$

Растојанието од нултиот до првиот дифракционен максимум во фокусната рамнина на леќата, за случај на бранова должина λ_1 е

$$x_1 = f\text{tg}\theta_1 \approx f\sin\theta_1,$$

односно

$$x_1 = \lambda_1 \frac{f}{d}.$$

Аналогно, за случај на бранова должина λ_2, тоа растојание е

$$x_1^{'} = f\text{tg}\theta_1^{'} \approx f\sin\theta_1^{'},$$

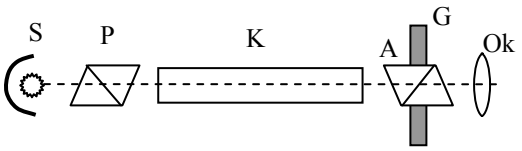
односно

$$x_1^{'} = \lambda_2 \frac{f}{d}, \text{ или } x_1^{'} = \lambda_2 \frac{x_1}{\lambda_1}.$$

Од претходната релација изразуваме и пресметуваме: $\lambda_2 = \frac{x_1^{'}}{x_1}\lambda_1$;

$$\boxed{\lambda_2 = 514\,\text{nm}}.$$

3. Концентрацијата на оптички активните раствори може да се определи со помош на инструмент наречен поларимeтар. Шематскиот приказ на инструментот е даден на сл.3. Монохроматската светлина од изворот S, најпрво се упатува кон поларизаторот P, кој на излезот дава линеарно поларизирана светлина. Поларизираниот зрак потоа минува низ растворот поставен во стаклената кивета K пришто, поради интеракцијата на светлината со растворот, доаѓа до вртење на рамнината на поларизација за извесен агол кој зависи од концентрацијата на растворот. Аголот за кој се завртела рамнината на поларизација се мери со посебен систем составен од анализатор A и гониометар G (гониометарот е инструмент за мерење на агли).



Сл. 3

Студент добил за задача со помош на поларимeтар да ја измери концентрацијата на даден раствор од шеќер во вода. За таа цел тој најпрво самиот подготвил друг раствор на тој начин што 2 g шеќер ги растворил во 141,3 cm^3 вода, што одговара на волуменот на киветата. Со помош на поларимeтарот го измерил аголот за кој вака подготвениот раствор ја врти рамнината на поларизација на светлината и добил вредност 12,15°. Потоа, во киветата го ставил растворот со непозната концентрација и измерил дека овој раствор ја врти рамнината на поларизација за агол 9,27°. Определете ја концентрацијата на вториот раствор, како и специфичниот агол на завртување ако е познато дека киветета има цилиндрична форма со внатрешен дијаметар од 3 cm.

Решение:

Аголот α за кој се завртува рамнината на поларизација на светлината при минување низ растворот, во општ случај, се определува според релацијата

$$\alpha = \alpha_0 c l \,, \qquad (1)$$

каде што α_0 е специфичен агол на завртување кој зависи од видот на растворот (во случајов раствор на шеќер во вода), c е концентрацијата на растворот и l е должината на киветата.

Концентрацијата на растворот што го подготвил студентот е

$$c_1 = \frac{m}{V} = \frac{2\,\mathrm{g}}{141{,}3\,\mathrm{cm}^3} = 14{,}15 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 14{,}15\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}\,.$$

Должината на киветата ја изразуваме преку волуменот и дијаметарот и за неа се добива

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot l\,, \qquad l = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{4V}{\pi \cdot d^2} = 20\ \mathrm{cm}\,.$$

Ако аголот за кој рамнината на поларизација била завртена кога во киветета бил поставен растворот што го подготвил студентот, го означиме со α_1, тогаш од релацијата (1) за специфичниот агол на вртење се добива

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{c_1 \cdot l} = \frac{12{,}15^\circ}{14{,}15 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g/cm}^3 \cdot 20\,\mathrm{cm}} = 42{,}93\ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}}$$

Непознатата концентрација c_2, ја определуваме според релацијата $\alpha_2 = \alpha_0 c_2 l$, каде што α_2 го означува аголот за кој се завртела рамнината на поларизација кога во киветата бил поставен соодветниот раствор.

$$\boxed{c_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 \cdot l} = \frac{9{,}27^\circ}{42{,}93\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{g} \cdot 20\,\mathrm{cm}} = 10{,}8 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 10{,}8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}}$$

4. Атомот на водородот поминува од возбудена во основната состојба, при што емитира фотони со бранови должини $\lambda_1 = 121{,}5\ \text{nm}, \lambda_2 = 485\ \text{nm}, \lambda_3 = 2630\ \text{nm}$. Да се определи енергијата на водородниот атом кога електронот е во состојба со најголема енергија и квантниот број n што одговара на таа состојба. ($h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}; c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}; e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}; E_1 = -13{,}60\ \text{eV}$).

Решение:

Електронот зрачи или апсорбира енергија само при преминот од една во друга стационарна орбита. Енергијата на квантот што се зрачи или апсорбира изнесува

$$hf_{ns} = E_n - E_s$$

Каде E_n, E_s се енергиите на водородниот атом кога електронот се наоѓа на соодветните стационарни патеки.

Од тука бидејќи преминот во основна состојба е каскаден

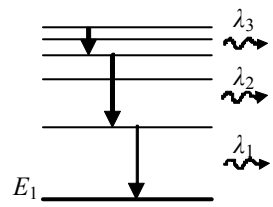
$$E_n = \frac{hc}{\lambda} + E_1 \text{ каде } \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2} + \frac{hc}{\lambda_3} = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right)$$

$E_1 = -13.6\ \text{eV}$ е енергијата на основното ниво на водородот.

Заменувајќи за вредноста на $1\text{J} = 6.242 \cdot 10^{18}\ \text{eV}$ за $hc\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right)$ добиваме $13{,}23\ \text{eV}$.

Така за E_n добиваме

$$E_n = 13{,}23\ \text{eV} - 13{,}60\ \text{eV} = -0{,}370\text{eV}$$



Земајќи во предвид дека $E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$, каде за $n = 1, E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$ имаме

$$n^2 = \frac{E_1}{E_n} = 36{,}76 \rightarrow n = 6{,}06 \approx 6.$$

5. Брановата должина на K_α линијата на елементот со реден број Z е $x = 1{,}1664$ пати поголема од брановата должина на K_α линијата на елементот со реден број $Z_1 = Z + 2$. Да се определат редните броеви на двата елементи. Константата на екранирање за K_α линијата е 1.

Решение:
Според законот на Мозли за фреквенцијата *f* на линија од дадена серија во карактеристичниот спектар на рендгенското зрачење на елементот со реден број *Z*, може да се запише

$$\sqrt{f} = b(Z - \sigma)$$

каде σ е константата на екранирање, а b е константа на пропорционалност. Имајќи во предвид дека врската помеѓу фреквенцијата и брановата должина е дадена со формулата $f = \frac{c}{\lambda}$ горната равенка може да се запише во облик

$$\lambda = \frac{c}{b^2 (Z - \sigma)^2}.$$

Ако оваа равенка ја запишеме за линиите K_α за елементот со реден број Z и за елементот со реден број Z_1 имаме

$$\lambda_Z = \frac{c}{b^2 (Z - \sigma)^2} \text{ и } \lambda_{Z_1} = \frac{c}{b^2 (Z_1 - \sigma)^2}.$$

За односот на брановите должини имаме:

$$x = \frac{\lambda_Z}{\lambda_{Z_1}} = \frac{\dfrac{c}{b^2 (Z - \sigma)^2}}{\dfrac{c}{b^2 (Z_1 - \sigma)^2}} = \frac{(Z_1 - \sigma)^2}{(Z - \sigma)^2} = \frac{(Z + 1)^2}{(Z - 1)^2}.$$

При добивањето на последната релација беше искористено дека $Z_1 = Z + 2$ и дека $\sigma = 1$. Од последната равенка преку елементарни математички операции може да се покаже дека:

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 26} \text{ односно } \boxed{Z_1 = Z + 2 = 28}.$$